# РЕШЕНИ ЗАДАЦИ СА РАНИЈЕ ОДРЖАНИХ КЛАСИФИКАЦИОНИХ ИСПИТА

**2006.**

**Задатак 1.**

Одредити вредност израза:

а) $\left(\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{b^2}{a}\right):\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1\right)$ за $a=4{,}321$ и $b=-0{,}679$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}$

Решење:

а) Како је за $a \neq 0$ и $b \neq 0$ дати израз идентички једнак изразу $a-b$,

$$\left(\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)=\frac{a^3-b^3}{ab}:\frac{a^2+b^2+ab}{ab}=$$

$$=\frac{(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)}{ab}\cdot\frac{ab}{a^2+ab+b^2}=a-b,$$

то је за дате вредности $a=4{,}321$ и $b=-0{,}679$ вредност израза $a-b=5$.

б)

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{9}-\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{9-7}=\frac{\sqrt{9}-1}{2}=\frac{3-1}{2}=1.$$

**Задатак 2.**

Решити једначину:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2.$$

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x=2 \text{ тј.}$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}+\frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}}=2.$$

Увођењем смене $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=t$ добијамо $t+\frac{1}{t}=2$ тј. $t^{2}-2t+1=0 \Leftrightarrow (t-1)^{2}=0$, одакле је $t=1$, односно $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}=1$. Дакле, решење полазне једначине је $x=0$.

**Задатак 3.**

Доказати идентитет:

$$\frac{2\sin\sim-\sin 2\sim}{2\sin\sim+\sin 2\sim}=\mathrm{tg}^{2}\frac{\sim}{2}.$$

Решење:

За $\sim \neq k$® важи:

$$\frac{2\sin\sim-\sin 2\sim}{2\sin\sim+\sin 2\sim}=\frac{2\sin\sim-2\sin\sim\cdot\cos\sim}{2\sin\sim+2\sin\sim\cdot\cos\sim}=$$

$$=\frac{2\sin\sim\cdot(1-\cos\sim)}{2\sin\sim\cdot(1+\cos\sim)}=\frac{(1-\cos\sim)}{(1+\cos\sim)}=\frac{2\sin^{2}\frac{\sim}{2}}{2\cos^{2}\frac{\sim}{2}}=tg^{2}\frac{\sim}{2}.$$

**Задатак 4.**

Ако се број страница правилног многоугла смањи за један, број његових дијагонала смањи се за осам. Који је то многоугао?

Решење:

Према услову задатка важи:

$$D_{n}-8=D_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\cdot(n-3)}{2}-8=\frac{(n-1)\cdot(n-1-3)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^{2}-3n-16}{2}=\frac{n^{2}-5n+4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n=20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=10.$$

**Задатак 5.**

Написати једначину праве која на координатним осама одсеца једнаке одсечке и додирује кружницу $x^{2}+y^{2}=18$.

Решење:

Једначину праве можемо написати у сегментном облику $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$. Како је $p=q$ то је $x+y=p \Leftrightarrow y=-x+p$. Права $y=kx+n$ додирује кружницу $x^2+y^2=r^2$ ако је $r^2\cdot\left(1+k^2\right)=n^2$. Како је $r^2=18$, $k=-1$ и $n=p$, то је $36=p^2 \Leftrightarrow p=\pm 6$, па су једначине праве :

$$t_1 : y=-x+6 \quad \text{и} \quad t_2 : y=-x-6 .$$

**2007.**

**Задатак 1.**

Вредност израза

$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}$ једнака је:

а) $-1$;  б) $\sqrt{3}$;  в) 1;  г) $\sqrt{3}+3$;  д) $\sqrt{3}+2$.

Решење:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{3+2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)^{-1}=\frac{2\cdot(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}{2\cdot(1+\sqrt{3})}=1$$

Одговор: в)

**Задатак 2.**

Упрошћен израз

$\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)$ има облик:

а) $\frac{a+x}{1+x}$;  б) $\frac{a}{x^3+1}$;  в) $a$;  г) $x$;  д) 0.

Решење:

$$\frac{ax+a}{x^2-x+1} : \left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)=\frac{a(x+1)}{x^2-x+1} : \frac{x^2-x+1+3x}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=$$
$$=\frac{a\cdot(x+1)}{x^2-x+1}\cdot\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x^2+2x+1}=$$
$$=\frac{a\cdot(x+1)^2\cdot(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)\cdot(x+1)^2}=a \qquad x\neq -1$$

<u>Одговор: в)</u>

**Задатак 3.**

Решења квадратне једначине $mx^2-(m+2)x+2=0$ задовољавају неједнакост $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\geq 3$ за

а) $m\in(-\infty,0)$; б) $m\in[3,\infty)$; в) $m\in[4,+\infty)$;

г) $m\in[-4,4)$; д) $m\in(0,4)$.

Решење:

На основу Виетових правила је $x_1+x_2=\frac{m+2}{m}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{2}{m}$, $x_1,x_2\neq 0$, $m\neq 0$, па дата неједнакост добија облик:

$$\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\geq 3\Leftrightarrow\frac{\frac{m+2}{m}}{\frac{2}{m}}\geq 3\Leftrightarrow\frac{m+2}{2}\geq 3\Leftrightarrow m+2\geq 6\Leftrightarrow m\geq 4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m\in[4,+\infty)$$

<u>Одговор: в)</u>

**Задатак 4.**

Збир решења једначине $\sqrt[x]{64}-5\cdot\sqrt[x]{2^{x+3}}+16=0$ је:

а) 10; б) 3; в) 4; г) 5; д) 16.

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини

$$2^{\frac{6}{x}}-5\cdot 2\cdot 2^{\frac{3}{x}}+16=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\frac{3}{x}}\right)^2-5\cdot 2\cdot 2^{\frac{3}{x}}+16=0$$

Увођењем смене $2^{\frac{3}{x}}=t$, једначина се трансформише у $t^2-10t+16=0$, чија су решења $t_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 16}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}$, $t_1=8$, $t_2=2$. Заменом добијамо $2^{\frac{3}{x}}=8$ или $2^{\frac{3}{x}}=2$, односно $2^{\frac{3}{x}}=2^3$ или $2^{\frac{3}{x}}=2^1$ па је $\frac{3}{x}=3$ или $\frac{3}{x}=1$. Дакле $x_1=1$ и $x_2=3$. Отуда је $x_1+x_2=1+3=4$.

<u>Одговор: в)</u>

**Задатак 5.**

Производ решења једначине

$$\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}} 3+\log_3\sqrt{x}+\frac{1}{2} \quad \text{је:}$$

а) $9$; б) $\frac{1}{3}$; в) $3$; г) $27$; д) $-2$.

Решење:

Нека је $x>0$. Дата једначина еквивалентна је једначини $\frac{1}{\log_3 x}+\log_3 x=\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{2}$.

Усвајањем смене $\log_3 x=t$, једначина добија облик $\frac{1}{t}+t=\frac{2}{t}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\Leftrightarrow t^2-t-2=0$ чија су решења $t_1=2$ и $t_2=-1$, па је $\log_3 x=2\Leftrightarrow x=3^2=9$ или $\log_3 x=-1\Leftrightarrow x_2=3^{-1}=\frac{1}{3}$, односно $x_1\cdot x_2=9\cdot\frac{1}{3}=3$.

<u>Одговор: в)</u>

**Задатак 6.**

Израз

$$\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{2-\sin 2x} \quad \text{идентички је једнак:}$$

а) $\cos(x-\frac{®}{4})$; б) $\frac{\cos x+\sin x}{2}$; в) $\sin(x-\frac{®}{4})$; г) 1; д) 0.

Решење:

$$\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{2-\sin 2x}=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x)}{2-2\cdot\sin x\cdot\cos x}=$$
$$=\frac{(\cos x+\sin x)\cdot(1-\sin x\cdot\cos x)}{2(1-\sin x\cdot\cos x)}=$$
$$=\frac{\cos x+\sin x}{2}.$$

Одговор: б)

**Задатак 7.**

У правоуглом троуглу једна катета је $8\,\mathrm{cm}$ а друга је $2\,\mathrm{cm}$ краћа од хипотенузе. Површина тог троугла је:

а) $40\,\mathrm{cm}^2$; б) $60\,\mathrm{cm}^2$; в) $80\,\mathrm{cm}^2$; г) $48\,\mathrm{cm}^2$; д) $126\,\mathrm{cm}^2$.

Решење:

Ако су $a$ и $b$ катетете, а $c$ хипотенуза правоуглог троугла, онда је $a=8\,\mathrm{cm}, b=c-2$. Применом Питагорине теореме добијамо:

$$c^2=(c-2)^2+8^2 \Leftrightarrow c^2=c^2-4\cdot c+4 \Leftrightarrow 4\cdot c=68 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c=17\,cm.$$

Отуда, $b=17-2=15\,\mathrm{cm}$, па је

$$P=\frac{a\cdot b}{2} \Leftrightarrow P=\frac{8\cdot 15}{2} \Leftrightarrow P=60\,cm^2.$$

Одговор: б)

**Задатак 8.**

У купу, чији је осни пресек једнакостранични троугао, уписана је лопта запремине $\frac{32}{3}$®. Запремина купе је:

а) 20® ; б) 30® ; в) 25® ; г) 24® ; д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Нека је $s$ изводница купе, $r$ полупречник основе , $H$ висина купе, а $R$ полупречник лопте. Како је осни пресек једнакостраничан троугао, то је $2\cdot r=s$ и $H=\frac{s\cdot\sqrt{3}}{2}$, а $R=\frac{1}{3}H$ тј.

$R = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{6}$. Запремина лопте је $V = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot ®$, па је $\frac{32}{3}® = \frac{4}{3} R^3 ®$, одакле је $R = 2$. Тада је $2 = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{6}$ тј. $s = 4\sqrt{3}$, а $r = \frac{s}{2} = 2\sqrt{3}$, $r = 2 \cdot \sqrt{3}$, $H = 6$. Запремина купе је

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot ® \cdot H \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot ® \cdot 6 \Leftrightarrow V = 24®.$$

<u>Одговор: г)</u>

**Задатак 9.**

Услов да права $kx - y + 11 = 0$ додирује елипсу $3x^2 + 2y^2 = 11$ је да параметар $k$ има вредности:

а) $k \pm 1$; б) $k \pm 11$; в) $k = 0$; г) $k \pm \sqrt{\frac{63}{2}}$ д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Права $y = kx + n$ додирује елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако је $a^2k^2 + b^2 = n^2$. Како се дата права може записати у облику $y = kx + 11$ и елипса $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} + \frac{y^2}{\frac{11}{2}} = 1$ то је:

$$\frac{11}{3} \cdot k^2 + \frac{11}{2} = 11^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot k^2 + \frac{1}{2} = 11 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot k^2 = \frac{21}{2} \Leftrightarrow k^2 = \frac{63}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{63}{2}}.$$

<u>Одговор: г)</u>

**Задатак 10.**

Тринаести члан аритметичког низа -2, -6, -10,... је:

а) 50; б) -50; в) -26; г) 100; д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Како је $a_1 = -2$ и $d = -6 - (-2) = -4$, то је

$$a_{13} = a_1 + 12 \cdot d \Leftrightarrow a_{13} = -2 + 12 \cdot (-4) \Leftrightarrow a_{13} = -50.$$

<u>Одговор: б)</u>

**2008.**

**Задатак 1.**

Вредност израза

$$\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} \quad \text{је:}$$

а) $2b$; б) $2a$; в) $2a + 2b$; г) $2a - 2b$.

Решење:

За $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$

$$\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}=$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}-\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{ab}}=$$

$$=\left(\frac{\frac{a^2+b^2}{ab}}{\frac{a+b}{ab}}\right)+\left(\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}\right)-\frac{\frac{a-b}{ab}}{\frac{1}{ab}}=$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{2ab}{a+b}-(a-b)=\frac{a^2+b^2+2ab-a^2+b^2}{a+b}=$$

$$=\frac{2ab+2b^2}{a+b}=\frac{2b(a+b)}{a+b}=2b$$

Одговор: а)

**Задатак 2.**

Производ решења једначине $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$ је:

а) $\sqrt{2}$; б) 1; в) 0; г) 2.

Решење:

Дата једначина може се представити у облику:

$$\left(3^{x^2}\right)^2\cdot\frac{1}{9}-36\cdot 3^{x^2}\cdot\frac{1}{3^3}+3=0 \Leftrightarrow \left(3^{x^2}\right)^2-12\cdot 3^{x^2}+27=0\ .$$

Увођењем смене $3^{x^2}=t$, добија се: $t^2-12\cdot t+27=0$ чија су решења $t_1=3$ и $t_2=9$, одакле је $3^{x^2}=3^2$ и $x^2=2,\quad x=\pm\sqrt{2}$ или $3^{x^2}=3^1,\ x^2=1,\quad x=\pm1$ па је производ решења $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=$ $=\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot1\cdot\left(-1\right)=2$.

<u>Одговор: г)</u>

**Задатак 3.**

Решења једначине $\sin x+\cos 2x=1$ су:

а) $x=k\pi$; б) $x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x_2=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$;

в) $x=\frac{k\pi}{2}$; г) $x_1=k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x_3=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

Решење:

Како је $1-\boldsymbol{\cos}2x=2\boldsymbol{\sin}^2x$, то се заменом добија квадратна једначина:

$$2\cdot\boldsymbol{\sin}^2x-\boldsymbol{\sin}x=0\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{\sin}x\cdot\left(2\cdot\boldsymbol{\sin}x-1\right)=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{\sin}x=0\ \vee\ \boldsymbol{\sin}x=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=k\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi,\quad x_3=\frac{5\pi}{6}+2\cdot k\cdot\pi$$

<u>Одговор: г)</u>

**Задатак 4.**

Површина ромба чије се дијагонале разликују за $8\,m$ не мења се ако се краћа дијагонала продужи за $3\ m$, а дужа скрати за $4\ m$. Та површина је:

а) $120\,m^2$; б) $60\,m^2$; в) $240\ m^2$; г) $100\,m^2$.

Решење:

Означимо дужине дијагонала са $d_1$ и $d_2$. Према условима задатка добијамо следећи систем:

$$d_1 - d_2 = 8$$
$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{(d_1 - 4)\cdot(d_2 + 3)}{2}$$

$$d_1 = d_2 + 8$$
$$(d_2 + 8)\cdot d_2 = (d_2 + 4)\cdot(d_2 + 3)$$

$$d_1 = d_2 + 8$$
$$d_2 = 12 \Rightarrow d_1 = 20$$

Тражена површина је $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{20 \cdot 12}{2} = 120\ m^2$.

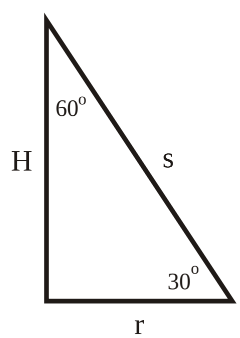
Одговор: а)

**Задатак 5.**

Угао између изводнице и висине праве кружне купе је $60^0$, а разлика њихових дужина је $10\,m$. Запремина купе је:

а) 1000® $m^3$;  б) 100® $m^3$;  в) 314 $m^3$;  г) 300®$m^3$.

Решење:




$$\frac{H}{s} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow s = 2 \cdot H,$$
$$s - H = 10, 2 \cdot H - H = 10\,m, H = 10 \Rightarrow s = 20\,m$$
$$\frac{r}{s} = \sin 60^\circ, r = s \cdot \sin 60^\circ, r = 10\sqrt{3}\,m$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot ® \cdot H$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(10\sqrt{3}\right)^2 \cdot ® \cdot 10$$
$$V = 1000®\ m^3$$

Одговор: а)

**2009.**

**Задатак 1.**

Вредност израза

$$\frac{a}{b} \cdot \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)} \cdot \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)$$ је:

а) 1 ;  б) 2 ;  в) 0 ;  г) -1 .

Решење:

За $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$

$$\frac{a}{b}\cdot\left(1-\frac{a}{a+b}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{b}{a+b}\right)=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{a+b-a}{a+b}\right)+\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a+b-b}{a+b}\right)=$$
$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{a+b}=$$
$$=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=$$
$$=\frac{a+b}{a+b}=1$$

Одговор: а)

**Задатак 2.**

Решења једначине $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}} 3+\log_3\sqrt{x}+\frac{1}{2}$ су :

а) 3 или 0 ; б) $\frac{1}{3}$ или 9 ; в) 1 или 2 ; г)3 или 6 .

Решење:

Једначина има смисла за $x>0$ и $x\neq 1$.

Како је $\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}$, $\log_3\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log_3 x$ и $\log_{\sqrt{x}} 3=\frac{2}{\log_3 x}$, то је дата једначина еквивалентна са $\frac{1}{\log_3 x}+\log_3 x=\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{2}$.

Увођењем смене $\log_3 x=t$, добија се:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t}+t=\frac{2}{t}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2+2\cdot t^2=4+t^2+t\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2-t-2=0$$
$$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-2)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{array}{l}2\\-1\end{array}\right.$$

Одакле је $\boldsymbol{\log}_3 x=2\Leftrightarrow x=3^2=9$ или $\log_3 x=-1\Leftrightarrow x=3^{-1}=\frac{1}{3}$.

Одговор: б)

**Задатак 3.**

Ако је $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ и $\alpha$ оштар угао, онда је вредност израза $\cos 2\alpha + \left(\sin(\pi - \alpha)\right)^2$ једнака:

а) $\frac{5}{17}$ ; б) $\frac{3}{2}$ ; в) $\frac{225}{289}$ ; г) $\frac{7}{17}$.

Решење:

Како је $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ то је

$$\boldsymbol{cos}\, 2\alpha + \left(\boldsymbol{sin}(\pi - \alpha)\right)^2 = \boldsymbol{cos}^2\alpha - \boldsymbol{sin}^2\alpha + \boldsymbol{sin}^2\alpha = \boldsymbol{cos}^2\alpha = 1 - \boldsymbol{sin}^2\alpha =$$
$$= 1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}.$$

<u>Одговор: в)</u>

**Задатак 4.**

У једнакокраком троуглу збир трећине угла при врху и половине једног од углова на основици износи $48^0$. Углови тог троугла су:

а) $36^0, 36^0, 108^0$ ; б) $30^0, 30^0, 120^0$ ; в) $40^0, 40^0, 100^0$ ; г) $36^0, 72^0, 72^0$.

Решење:

Нека су $\alpha$ и углови на основици, а $\gamma$ угао при врху. Тада је:

$$\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\gamma = 48^\circ$$
$$2\alpha + \gamma = 180^\circ$$
$$-\frac{3}{2}\alpha - \gamma = -144^\circ$$
$$2\alpha + \gamma = 180^\circ$$
$$\frac{1}{2}\alpha = 36^\circ \Rightarrow \alpha = 72^\circ$$
$$\gamma = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

Дакле $\alpha = \quad = 72^\circ$, $\gamma = 36^\circ$

<u>Одговор: г)</u>

**Задатак 5.**

Три броја образују растући аритметички низ.Њихов збир је 15 , а збир њихових квадрата је 147. То су бројеви :

а) -1, 5, 11 ; б) 0, 6, 9 ; в) 1, 6, 8 ; г) 3, 5, 7.

Решење:

Нека су то бројеви $a-d$, $a$, $a+d$. Тада је:

$$\underline{\begin{aligned}&a-d+a+a+d=15\\&(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=147\end{aligned}}$$

$$\underline{\begin{aligned}&3\cdot a=15\Rightarrow a=5\\&(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=147\end{aligned}}$$

$$a=5$$

$$25-10\cdot d+d^2+25+25+10\cdot d+d^2=147\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2=36\Leftrightarrow d=\pm 6.$$

Како је низ растући, то је $d>0$. Дакле, $d=6$ и тражени бројеви су -1, 5, 11.

Одговор: а)

**2010.**

**Задатак 1.**

Вредност израза $\left(\dfrac{3a^{-x}}{1-a^{-x}}-\dfrac{2a^{-x}}{1+a^{-x}}-\dfrac{a^x}{a^{2x}-1}\right):\dfrac{a^{-x}}{a^x-a^{-x}}$ је:

а) 1 ; б) 5 ; в) $a^x$; г) $a^x-1$.

Решење:

Како је $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ и $a^{2x}-1=\left(a^x-1\right)\left(a^x+1\right)$, дати израз добија облик:

$$\left(\frac{\frac{3}{a^x}}{1-\frac{1}{a^x}}-\frac{\frac{2}{a^x}}{1+\frac{1}{a^x}}-\frac{a^x}{a^{2x}-1}\right):\frac{\frac{1}{a^x}}{a^x-\frac{1}{a^x}}=$$

$$=\left(\frac{3}{a^x-1}-\frac{2}{a^x+1}-\frac{a^x}{a^{2x}-1}\right):\frac{1}{a^{2x}-1}=$$

$$=\frac{3a^x+3-2a^x+2-a^x}{a^{2x}-1}\cdot\left(a^{2x}-1\right)=5.$$

Одговор: б)

**Задатак 2.**

Решење једначине $\sqrt{x-2}=\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+1}$ је:

а) 3 ; б) 2 ; в) 1 ; г) 0 .

Решење:

Уз услове да је $x-2\geq 0,\quad 4x-3\geq 0,\quad x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$, добија се:

$$\left(\sqrt{x-2}\right)^2=\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2=4x-3-2\sqrt{4x^2+x-3}+x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x-3}=2x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+x-3=4x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Одговор: а)

**Задатак 3.**

Вредност израза $\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)$ је:

а) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 1 .

Решење:

Користећи формулу за разлику квадрата и одговарајуће адиционе формуле, добија се:

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)=1-\cos^2\frac{\pi}{8}=\sin^2\frac{\pi}{8}=$$
$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Одговор: б)

**Задатак 4.**

Бројеви: $\log 2,\ \log\left(5^x-1\right),\ \log\left(5^x+3\right)$ представљају три узастопна члана аритметичког низа за:

а) 1 ; б) $\log_2 5$; в) $\log_5 2$; г) 2 .

Решење:

Како је код аритметичког низа разлика два суседна члана константна, то је :

$$\log\left(5^x-1\right)-\log 2=\log\left(5^x+3\right)-\log\left(5^x-1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log\frac{5^x-1}{2}=\log\frac{5^x+3}{5^x-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5^x-1}{2}=\frac{5^x+3}{5^x-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(5^x-1\right)^2=2\left(5^x+3\right)$$

Увођењем смене $5^x=t,\quad t>0$, добија се квадратна једначина $t^2-4t-5=0$, чија су решења: $t_1=5,\ t_2=-1$. Дакле, $5^x=5\Leftrightarrow x=1$.

Одговор: а)

**Задатак 5.**

Обим већег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је 22 cm. Висина призме је за 1 cm краћа од основне ивице. Површина те призме је:

а) $72\sqrt{3}cm^2$ ; б) 72® $cm^2$; в) $24(2\sqrt{3}+3)cm^2$ ; г) 64 $cm^2$.

Решење:

Обележимо основну ивицу призме са $a$ ивисину са $H$. Већи дијагонални пресек призме је правоугаоник страница $2a$ и $a$ -1, одакле је обим једнак:

$$O=2(2a+a-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 22=2(3a-1)\Leftrightarrow a=4cm$$
$$H=a-1=3cm.$$

Како је површина шестостране призме једнака $P=3a^2\sqrt{3}+6aH$, то се заменом добијених вредности долази до решења:

$$P=48\sqrt{3}+72=24\ (2\sqrt{3}+3)cm^2.$$

Одговор: в)

**2011.**

**Задатак 1.**

Вредност израза $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\left(\sqrt{6}+11\right)^{-1}$ је:

а) 2 ; б) -115 ; ц) 100 ; д) -100 .

Решење:

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right):\left(\sqrt{6}+11\right)^{-1}=$$
$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}\cdot\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}-1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}\cdot\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\cdot\frac{3+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\right)\cdot:\frac{1}{\sqrt{6}+11}=$$
$$\left(\frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{6-1}+\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4}-\frac{12\left(\sqrt{6}+3\right)}{9-6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$
$$\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=6-121=-115$$

<u>Одговор: б)</u>

**Задатак 2.**

Производ решења једначине $\log_x 2\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2$ је:

а) 32 ; б) 6; ц) 1 ; д) -6 .

Решење:

Примењујући правила о промени основе логаритма и о логаритму количника, добија се једначина облика:

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 x-\log_2 16}=\frac{1}{\log_2 x-\log_2 64}\Leftrightarrow\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 x-4}=\frac{1}{\log_2 x-6}$$

Увођењем смене $\log_2 x=t$ добија се:

$$\frac{1}{t(t-4)}=\frac{1}{t-6}\Leftrightarrow t^2-4t=t-6\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=3\Leftrightarrow\log_2 x=3\Leftrightarrow x_1=2^3=8\\ t_2=2\Leftrightarrow\log_2 x=2\Leftrightarrow x_1=2^2=4\end{cases}$$

Како су решења дате једначине $x_1=8$ и $x_2=4$ то је њихов производ $x_1\cdot x_2=32$.

<u>Одговор: а)</u>

**Задатак 3.**

Упрошћен израз $\dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{2 + \sin 2x}$ је:

а) 2 ; б) $\dfrac{\cos x + \sin x}{2}$; ц) $\dfrac{\cos x - \sin x}{2}$ ; д) 1 .

Решење:

Користећи формулу за разлику кубова, основни тригонометријски идентитет $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ добија се:

$$\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{2 + \sin 2x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x)}{2 + 2\sin x \cos x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x)}{2(1 + \sin x \cos x)} = \frac{\cos x - \sin x}{2}$$

Одговор: ц)

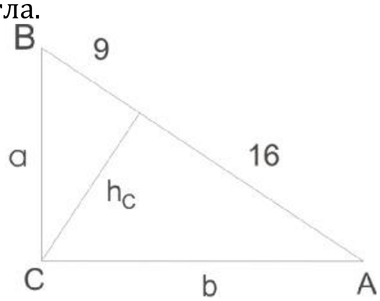
**Задатак4.**

Висина хипотенузе дели хипотенузу на одсечке дужина $9\,\mathrm{cm}$ и $16\,\mathrm{cm}$. Обим уписане кружнице датог правоуглог троугла је:

а) 10® cm ; б) 100® cm ; ц) 5® cm ; д) 25® cm .

Решење:

Како су одсечци хипотенузе дати то је хипотенуза $c = 9\,\mathrm{cm} + 16\,\mathrm{cm} = 25\,\mathrm{cm}$. Висина је поделила дати троугао на два правоугла троугла, у којима се применом Питагорине теореме могу изразити катете датог троугла.




$a^2 = 9^2 + h_c^2$ и $b^2 = 16^2 + h_c^2$. Како је $c^2 = a^2 + b^2$ и $c = 25\,\mathrm{cm}$ то се сабирањем ових једнакости добија $25^2 = 9^2 + 16^2 + 2h_c^2$, одакле је $h_c = 12\,\mathrm{cm}$, па је $a = 20\,\mathrm{cm}$ и $b = 15\,\mathrm{cm}$. Како је полупречник уписане кружнице правоуглог троугла $r = \dfrac{a + b - c}{2}$ то је $r = 5\,\mathrm{cm}$, па је обим уписане кружнице $O = 2r$® $= 10$® cm .

Одговор: а)

**Задатак 5.**

Основна ивица правилне четворостране пирамиде је $a = 6\,\text{cm}$, а површина омотача $M = 60\,\text{cm}^2$. Запремина те пирамиде је :

а) $48\,\text{cm}^3$; б) $60\,\text{cm}^3$; ц) $36\,\text{cm}^3$; д) $120\,\text{cm}^3$ .

Решење:

Како је омотач правилне четворостране пирамиде $M = 2ah_a = 60\,\text{cm}^2$ и $a = 6\,\text{cm}$, то је апотема $h_a = 5\,\text{cm}$. Из правоуглог троугла који повезује апотему, висину пирамиде и полупречник уписане кружнице основе пирамиде, је $H^2 = h_a^2 - r^2$, а како је у основи квадрат, то је полупречник уписане кружнице једнак половини странице, $r = \dfrac{6}{2}\text{cm} = 3\,\text{cm}$ то је $H = 4\,\text{cm}$.

Тражена запремина пирамиде је:

$V = \dfrac{1}{3}BH = \dfrac{1}{3}a^2H = \dfrac{1}{3}\cdot 36\cdot 4 = 48\,\text{cm}^3$.

Одговор: а)

**2012.**

**Задатак 1.**

Вредност израза $\left(\dfrac{1}{2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}} - \dfrac{3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2} + \dfrac{5}{3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}} - \dfrac{25\boldsymbol{y}-17\boldsymbol{x}}{6\boldsymbol{x}^2-6\boldsymbol{y}^2}\right) \div \dfrac{2}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}$ је:

1) 2 2) 1 3) $xy$ 4) $x+y$

Решење:

Растављајући имениоце на чиниоце , израз постаје :

$$\left(\frac{1}{2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} - \frac{3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} + \frac{5}{3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} - \frac{25\boldsymbol{y}-17\boldsymbol{x}}{6(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}\right) \div \frac{2}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} =$$

$$\left(\frac{3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{6(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} - \frac{6(3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{6(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} + \frac{5\cdot 2\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}{6(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} - \frac{25\boldsymbol{y}-17\boldsymbol{x}}{6(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}\right) \div \frac{2}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} =$$

$$\left(\frac{3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}-18\boldsymbol{x}+6\boldsymbol{y}+10\boldsymbol{x}+10\boldsymbol{y}-25\boldsymbol{y}+17\boldsymbol{x}}{6(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}\right) \div \frac{2}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} =$$

$$\left(\frac{12\boldsymbol{x}-12\boldsymbol{y}}{6(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}\right) \div \frac{2}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = \frac{12(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{6(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} \div \frac{2}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = \frac{2}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} \div \frac{2}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}} = 1 \;,\; \boldsymbol{x} \neq \pm\boldsymbol{y}$$

Одговор: 2)

**Задатак 2.**

Збир решења једначине $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^3 + 2 = 0$ и вредности израза $3\log_3 81 + 2\log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4}$ је :

1) 3    2) 2    3) 7    4) 6

Решење:

За $x > 0$, дата једначина еквивалентна је једначини $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$, увођењем смене $\log_2 x = t$ , добија се квадратна једначина $t^2 - 3t + 2 = 0$ , чија су решења $t_1 = 1$ , $t_2 = 2$ , одакле су решења полазне једначине $x_1 = 2$ , $x_2 = 4$ .

На основу особина логаритама $\log_a b^s = s\log_a b$ и $\log_{a^s} b = \frac{1}{s}\log_a b$ је

$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$ , $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5$

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3$ , $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-2} = -4$

Отуда је : $3\log_3 81 + 2\log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = 3\cdot 4 + 2\cdot(-5) + 3 - 4 = 1$

Одакле је збир решења дате једначине и вредности датог израза $2 + 4 + 1 = 7$ .

<u>Одговор: 3)</u>

**Задатак 3.**

Решења једначине $3 - 4(\sin 3x)^2 = 0$ на интервалу $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ су:

1) $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$    2) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$    3) $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}$    4) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини :

$(\sin 3x)^2 = \frac{3}{4}$ , одакле је $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Решења ових једначина су :

$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi$ и $3x = \frac{4\pi}{3} + 2m\pi \vee 3x = \frac{5\pi}{3} + 2s\pi$ ,одакле је :

$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2l\pi}{3}$ и $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2m\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2s\pi}{3}$    $k, l, m, s \in Z$

Како решења треба одредити на интервалу $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ то је $x = \frac{\pi}{9} \vee x = \frac{2\pi}{9} \vee x = \frac{4\pi}{9} \vee x = \frac{5\pi}{9}$ .

<u>Одговор: 3)</u>

**Задатак 4.**

Збир првих 120 парних природних бројева је :

1) 240 2) 14520 3) 18220 4) 1452

Решење:

Како парни природни бројеви чине аритметички низ, где је ралика свака два суседна члана $d=2$ и први члан $a_1=2$ то се из формуле за првих $n$ чланова аритметичког низа

$S_n=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)$ добија $S_{120}=\frac{120}{2}\left(2\cdot 2+(120-1)\cdot 2\right)=60\cdot(4+238)=14520$.

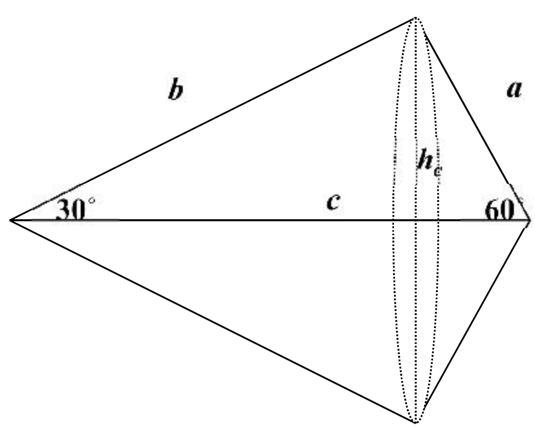
Одговор: 2)

**Задатак 5.**

Хипотенуза правоуглог троугла је $4$, а један оштар угао $30^\circ$. Запремина тела које настаје ротацијом троугла око хипотенузе је :

1) 4® 2) 72® 3) $24\sqrt{3}$ 4) $64\sqrt{3}$®

Решење:




Ротацијом троугла око хипотенузе настаје тело које се састоји од две купе спојене базама .Отуда је запремина тако добијеног тела:

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}r^2\pi H_1+\frac{1}{3}r^2\pi H_2=\frac{1}{3}r^2\pi\left(H_1+H_2\right)$$

Како је збир висина ове две купе једнак хипотенузи датог троугла то је $=\frac{1}{3}r^2\pi c$ .

Полупречник основа купа је висина датог троугла која одговара хипотенузи и може се израчунати из обрасца за површину правоуглог троугла: $P=\frac{ab}{2}=\frac{ch_c}{2}$. Како се у правоуглом троуглу наспрам угла од $30^\circ$ налази катета једнака половини хипотенузе то је $\boldsymbol{a}=2$ , а на основу Питагорине теореме $\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}$ **,** па је $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{h}_c=\sqrt{3}$ **.** Коначно запремина тела биће једнака :

$\boldsymbol{V}=\frac{1}{3}\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{\pi c}=\frac{1}{3}\sqrt{3}^2\boldsymbol{\pi}\cdot 4=4\boldsymbol{\pi}$ **.**

Одговор: 1)

**2013.**

**Задатак 1.**

Вредност израза

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\frac{2x-5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{5}{x-4}\right)^{-1}$$

је:

А) 2 ; Б) $\sqrt{x}-2$ ; В) $\sqrt{x}$ ; Г) 1 .

Решење:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-\frac{2x-5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{5}{x-4}\right)^{-1}=$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\cdot\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}-\frac{2x-5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{x-4}{5}\right)=$$

$$\left(\frac{x+2\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}-2x+5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{x-4}{5}\right)=\left(\frac{5}{x-4}\right)\cdot\left(\frac{x-4}{5}\right)=1$$

$$(x\geq 0\,,x\neq 4)$$

.

Одговор: Г)

**Задатак 2.**

Производ решења једначине $\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$ је:

А) -9 ; Б) 1 ; В) -6 ; Г) 0 .

Решење:

$\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x=8\Leftrightarrow\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{3}}+\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{3}}=8$ . Како је $\left(4-\sqrt{15}\right)\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)=1$ , тј. $\left(4-\sqrt{15}\right)=\left(4+\sqrt{15}\right)^{-1}$ , увођењм смене $\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{3}}=t$ једначина постаје $\frac{1}{t}+t=8\Leftrightarrow t^2-8t+1=0$ . Решења ове једначине су $t_1=\left(4-\sqrt{15}\right)=\left(4+\sqrt{15}\right)^{-1}$ , $t_2=\left(4+\sqrt{15}\right)$ , те је $\frac{x}{3}=-1\ \vee\ \frac{x}{3}=1$ . Отуда, решења полазне једначине су $x_1=-3$ , $x_2=3$ , те је њихов производ $x_1\cdot x_2=-9$ .

Одговор: А)

**Задатак 3.**

Број решења једначине $\cos 4x - 3\sin 2x = -1$ на интервалу $(0\,,\pi)$ је :

А) 4 ; Б) 0 ; В) 3 ; Г) 2 .

Решење:

$$\cos 4x - 3\sin 2x = -1 \;\Leftrightarrow\; 1 + \cos 4x - 3\sin 2x = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$2\cos^2 2x - 3\sin 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2(1 - \sin^2 2x) - 3\sin 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2 = 0$$

Решења последње једначине по $\sin 2x$ су -2 и $\frac{1}{2}$, а како је $-1 \le \sin 2x \le 1$, то је $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Отуда је $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$ ( $k, l \in \mathrm{Z}$ ), те је $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + l\pi$ ( $k, l \in \mathrm{Z}$).

Како се траже решења на интервалу $(0\,,\pi)$ то је $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$. Дакле број решења дате једначине на интервалу $(0\,,\pi)$ је 2.

Одговор: Г)

**Задатак 4.**

Површина кружног прстена, део између описаног и уписаног круга правилног шестоугла странице $a$, је $4\pi cm^2$. Површина тог шестоугла (у $cm^2$) *је* :

А) $24\sqrt{3}$ ; Б) $2\sqrt{3}$ ; В) 4 ; Г) 16 .

Решење:

Означимо са $R, r$ полупречник описаног и уписаног круга респективно. Тада је $R = a\,, r = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Како је површина кружног прстена $(R^2 - r^2)\pi = 4\pi$, то је $\left(a^2 - \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\pi = 4\pi$, одакле је $a = 4cm$. Тражена површина шестоугла је $P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$.

Одговор: А)

**Задатак 5.**

Запремина праве призме чија је основа ромб је $240\,cm^3$. Површине дијагоналних пресека су $60\,cm^2$ и $80\,cm^2$. Површина те призме је :

А) $24\sqrt{3}\,cm^2$; Б) $72\sqrt{3}\,cm^2$; В) $480\,cm^2$; Г) $248\,cm^2$.

Решење:

Нека су $d_1, d_2$ дијагонале ромба, $P_1 = d_1 \cdot H\,, P_2 = d_2 \cdot H$ површине дијагоналних пресека призме висине $H$. Површина основе $B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Запремина ове призме је $V =$

$\frac{d_1 . d_2}{2} H$ , одакле је $d_1 \cdot d_2 \cdot H = 2V$, те је $P_1 \cdot P_2 = 2V \cdot H$, а одатле заменом датих вредности добијамо $H = 10c$ . Из $P_1 = d_1 \cdot H \Longrightarrow d_1 = \frac{P_1}{H} = \frac{6}{1} = 6c$ , $d_2 = \frac{P_2}{H} = \frac{8}{1} = 8c$ Како је $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ то је $a = 5\ c$ . Тражена површина призме је $P = 2B + M = d_1 \cdot d_2 + 4a$ , одакле је $P = 248c\ ^2$.

Одговор: Г)

**2014.**

**Задатак 1.**
Вредност израза

$$\left(\sqrt{\mathbf{4-2\sqrt{3}}}+\sqrt{\mathbf{4+2\sqrt{3}}}\right)^{\mathbf{2}}-\left(\mathbf{4-2\sqrt{3}}\right)^{\mathbf{-1}}-\left(\mathbf{4+2\sqrt{3}}\right)^{\mathbf{-1}}$$

је:

А) 2 ; Б) 16 ; $B$) $4\sqrt{3}$ ; $Г$) 10.

Решење:

На основу формуле за квадрат збира

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = 4-2\sqrt{3}+2\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)}+4+2\sqrt{3}$$

и формуле за разлику квадрата

$$\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$$

следи да је

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = 12$$

Како је

$$\left(4-2\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{4-2\sqrt{3}}\cdot\frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4}$$

и

$$\left(4+2\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{1}{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{4+2\sqrt{3}}\cdot\frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$

то је

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2-\left(4-2\sqrt{3}\right)^{-1}-\left(4+2\sqrt{3}\right)^{-1} = 12-\frac{4+2\sqrt{3}}{4}-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$

$$= 12-\frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{4} = 12-\frac{8}{4} = 12-2 = 10.$$

Одговор: Г)

**Задатак 2.**
Производ решења једначине $\mathbf{8^{|1-3\ \ |} = 4^{2-3}}$ је:

А) $-\frac{7}{4}$ Б) $-\frac{1}{1}$ ; В) $\frac{1}{3}$; $Г$) 0 .

Решење:

Како је $|\mathbf{1-3}\ \ | = \begin{cases} \mathbf{1-3} & \boldsymbol{за\ x \le \frac{1}{3}} \\ 3x-1 & \boldsymbol{за\ x > \frac{1}{3}} \end{cases}$ то је за $\boldsymbol{x \le \frac{1}{3}}$ дата једначина еквивалентна једначини:
$\mathbf{2^{3\cdot(1-3\ \ )} = 2^{2\cdot(2-3\ \ )}}$ . Отуда је $3-9x = 4-6x$, односно $\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$. $\boldsymbol{За\ x > \frac{1}{3}}$ дата једначина еквивалентна је једначини:
$\mathbf{2^{3\cdot(3\ \ -1)} = 2^{2\cdot(2-3\ \ )}}$ , одакле је $9x-3 = 4-6x$, те је $\boldsymbol{x = \frac{7}{1}}$. Како су решења дате једначине $\boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{3}}$ и $\boldsymbol{x_2 = \frac{7}{1}}$ то је њихов производ $\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = -\frac{7}{4}}$.

Одговор: А)

**Задатак 3.**
Збир решења једначине $\boldsymbol{c\quad x + s\ \ \frac{x}{2} = 1}$ на интервалу $(\mathbf{0},\mathbf{4}\ \ ]$ је :

А) $4\pi$ ; Б) $2\pi$ ; В) $6\pi$; Г) $8\pi$ .

Решење:

Дата једначина еквивалентна је са

$$s\ \ \frac{x}{2} = 1 - c\quad x$$

Како је $1 - c\quad x = 2\mathrm{si}\imath^2\frac{x}{2}$ то је $s\ \ \frac{x}{2} - 2\mathrm{si}\imath^2\frac{x}{2} = 0$ , тј. $s\ \ \frac{x}{2}\cdot\left(1 - 2s\ \ \frac{x}{2}\right) = 0$ . Одатле је $s\ \ \frac{x}{2} = 0 \ \ s\ \ \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, те је $\frac{x}{2} = k\ \ \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2s\ \ \ \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2n\ \ ,k,s,n$ .
Зато је $x = 2k\ \ \ x = \frac{\pi}{3} + 4s\ \ \ x = \frac{5\pi}{3} + 4n\ \ ,k,s,n$ . Како се траже решења на интервалу $(0,4\pi]$, то је $x = 2\pi\ \ x = 4\pi\ \ x = \frac{\pi}{3}\ \ x = \frac{5\pi}{3}$, а одатле је њихов збир једнак $8\pi$ .

Одговор: Г)

**Задатак 4.**
Око круга пречника $15c$ описан је једнакокраки трапез, површине $255c\ \ ^2$. Збир нумеричких вредности обима и површине овог трапеза је:

А) 323 ; Б) 516 ; В) 355 ; Г) 426 .

Решење:

Нека су $a\ u\ b$ основице , $c$ крак , а $h$ висина датог трапеза. Приметимо да је пречник једнак висини.
Како је дати трапез тангентни четвороугао, то је збир основица једнак збиру кракова тј. $a + b = 2c$. Како је површина трапеза $P = \frac{a+b}{2}\cdot h$ , то знајући површину и висину можемо одредити збир основица, тј. $a + b = \frac{2P}{h} = \frac{2\cdot 2\quad c\ \ ^2}{1\ \ c} = 34cm$. Како је обим једнакокраког трапеза $O = a + b + 2c$, то је $O = 68c$ , отуда је збир нумеричких вредности обима и површине 68+255=323.

Одговор: А)

**Задатак 5.**

Запремина ваљка је $180\pi cm^3$. Површина осног пресека је $120cm^2$. Површина тог ваљка је :

А) $138\pi cm^2$; Б) $90\pi cm^2$; В) $480cm^2$; Г) $60cm^2$.

Решење:

Означимо са $r$ полупречник основе ваљка и са $H$ висину. Како је површина осног пресека $Q = 2rH \Rightarrow rH = \frac{Q}{2} = 60cm^2$. Запремина ваљка је $V = r^2\pi H$, тј $180\pi cm^3 = r\pi \cdot rH = r\pi 60cm^2$, одакле је $r = 3cm$ и $H = \frac{Q}{2r} = \frac{120cm^2}{2\cdot 3cm} = 20cm$. Површина ваљка је $P = 2r\pi \cdot (r + H) = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot (3 + 20) = 138\pi cm^2$.

Одговор: А)

**2015.**

**Задатак 1.**

У скупу целих бројева збир решења једначине $|2x - 3| - |x + 2| = 3 - x$ је:

А) 2 ; Б) 0 ; В) $-1$ ; Г) 3.

Решење:

Како је $|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$ и $|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 \\ -2 - x, & x < -2 \end{cases}$, то $x$ може припадати следећим интервалима $(-\infty, -2)$ ; $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$ ; $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. Разликујемо три случаја:

1) $x < -2$, 2) $-2 \leq x < \frac{3}{2}$, 3) $x \geq \frac{3}{2}$.

| | $x < -2$ | $-2 \leq x < \frac{3}{2}$ | $x \geq \frac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\lvert 2x - 3\rvert$ | $3 - 2x$ | $3 - 2x$ | $2x - 3$ |
| $\lvert x + 2\rvert$ | $-2 - x$ | $x + 2$ | $x + 2$ |

1) За $x \in (-\infty, -2)$ дата једначина еквивалентна је једначини $3 - 2x - (-2 - x) = 3 - x \Leftrightarrow 5 - x = 3 - x$, па једначина у овом случају нема решења.

2) За $x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right)$ дата једначина постаје

$$3 - 2x - (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow 1 - 3x = 3 - x \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1.$$

3) За $x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ дата једначина еквивалентна је једначини

$$2x - 3 - (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow x - 5 = 3 - x \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

Дакле, $x = -1$ и $x = 4$ су решења полазне једначине , па је збир решења -1+4=3.

Одговор: Г)

**Задатак 2.**

Ако је $\log 5 = a$, $\log 3 = b$, тада је $\log_{3} 8$ једнако:

А) $\frac{3-3a}{b+1}$; Б) $\frac{2-2a}{b+1}$; В) $\frac{3+3a}{b+1}$; Г) $\frac{2-2b}{a+1}$.

Решење:

На основу особина логаритама добија се:

$$\mathbf{l\ \ _3\ 8} = \frac{\mathbf{l\ \ 8}}{\mathbf{l\ \ 3}} = \frac{\mathbf{l\ \ 2^3}}{\mathbf{l\ \ 3\cdot 1}} = \frac{\mathbf{3\,l\ \ 2}}{\mathbf{l\ \ 3+l\ \ 1}} = \frac{\mathbf{3\,l\ \ \frac{1}{5}}}{\mathbf{l\ \ 3+l\ \ 1}} = \frac{\mathbf{3\cdot(l\ \ 1\ -l\ \ 5)}}{\mathbf{l\ \ 3+l\ \ 1}} = \frac{\mathbf{3\cdot(1-}\boldsymbol{a}\mathbf{)}}{\boldsymbol{b}\mathbf{+1}} = \frac{\mathbf{3-3}}{\boldsymbol{b}\mathbf{+1}}$$

Одговор: А)

**Задатак 3.**

Вредност израза $\left(\mathbf{1-s\ \ \frac{\boldsymbol{\pi}}{1}}\right)\cdot\left(\mathbf{1+s\ \ \frac{\boldsymbol{\pi}}{1}}\right)$ је:

А) 2 ; Б) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; Г) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ .

Решење:

Користећи формулу за разлику квадрата и одговарајуће тригоно-метријске идентитете добија се:

$$\left(\mathbf{1-s\ \ \frac{\boldsymbol{\pi}}{1}}\right)\cdot\left(\mathbf{1+s\ \ \frac{\boldsymbol{\pi}}{1}}\right) = \mathbf{1-s\ \ ^2\frac{\boldsymbol{\pi}}{1}} = \mathbf{c\ \ ^2\frac{\boldsymbol{\pi}}{1}} = \frac{\mathbf{1+c\ \ \frac{\boldsymbol{\pi}}{6}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2+\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}.$$

Одговор: Г)

**Задатак 4.**

Збир прва четри члана аритметичког низа једнак је 2, а следећа 4 једнак је 18. Број чланова овог низа које треба сабрати да би се добио збир 35 је:

А) 10 ; Б) 14 ; В) 20 ; Г) 16.

Решење:

Према условима задатка $\boldsymbol{S_4} = \mathbf{2}$ и $\boldsymbol{S_8} = \boldsymbol{S_4} + \mathbf{1\ \ \ } = \mathbf{2}$ . Из формуле за збир првих $n$ чланова аритметичког низа $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ и датих услова добија се следећи систем линеарних једначина $\frac{4}{2}(2a_1 + (4-1)d) = 2$ □ $\frac{8}{2}(2a_1 + (8-1)d) = 20$ тј. $4a_1 + 6d = 2$ □ $8a_1 + 28d = 20$. Овај систем има решења $a_1 = -1$ и $d = 1$. Ако је $n$ број првих чланова низа чији је збир 35, онда је $\frac{n}{2}\left(-2 + (n-1)\right) = 35$, односно $n^2 - 3n - 70 = 0$. Решавањем квадратне једначине добија се $n = 10$.

Одговор: А)

**Задатак 5.**

Ако су $\mathrm{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}\ \ = \boldsymbol{b}$, две странице троугла $\boldsymbol{ABC}$ и збир висина $h_c$ и $h_b$ једнак је трећој висини $h_a$ $(\boldsymbol{h_a}\ \ = \boldsymbol{h_c} + \boldsymbol{h_b})$, тада је страница $\boldsymbol{a}$ овог троугла једнака:

А) $\frac{b}{b+c}$; Б) $\frac{b}{b+c}$; В) $\frac{c-b}{b}$; Г) $\frac{c+b}{b}$.

Решење:

Како је површина троугла $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ , то је $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$ и како за висине овог троугла важи $\boldsymbol{h_a = h_c + h_b}$ добија се $\frac{2P}{a} = \frac{2P}{c} + \frac{2P}{b}$, одакле следи $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{b+c}{c}$, те је $\boldsymbol{a = \frac{b}{b+c}}$ .

Одговор: А)