

**РЕШЕНИ ЗАДАЦИ СА РАНИЈЕ ОДРЖАНИХ
КЛАСИФИКАЦИОНИХ ИСПИТА**

2006.

Задатак 1.

Одредити вредност израза:

а) $\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)$ за $a = 4,321$ и $b = -0,679$;

б) $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}$

Решење:

а) Како је за $a \neq 0$ и $b \neq 0$ дати израз идентички једнак изразу $a - b$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right) &= \frac{a^3 - b^3}{ab} : \frac{a^2 + b^2 + ab}{ab} = \\ &= \frac{(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}{ab} \cdot \frac{ab}{a^2 + ab + b^2} = a - b, \end{aligned}$$

то је за дате вредности $a = 4,321$ и $b = -0,679$ вредност израза $a - b = 5$.

б)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{9}-\sqrt{7}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{9-7} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{3-1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Задатак 2.

Решити једначину:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2.$$

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x = 2 \text{ тј.}$$

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} = 2.$$

Увођењем смене $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = t$ добијамо $t + \frac{1}{t} = 2$ тј. $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0$, одакле је $t = 1$, односно $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 1$. Дакле, решење полазне једначине је $x = 0$.

Задатак 3.

Доказати идентитет:

$$\frac{2 \sin \Gamma - \sin 2\Gamma}{2 \sin \Gamma + \sin 2\Gamma} = \operatorname{tg}^2 \frac{\Gamma}{2}.$$

Решење:

За $\Gamma \neq kf$ важи:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \Gamma - \sin 2\Gamma}{2 \sin \Gamma + \sin 2\Gamma} &= \frac{2 \sin \Gamma - 2 \sin \Gamma \cdot \cos \Gamma}{2 \sin \Gamma + 2 \sin \Gamma \cdot \cos \Gamma} = \\ &= \frac{2 \sin \Gamma \cdot (1 - \cos \Gamma)}{2 \sin \Gamma \cdot (1 + \cos \Gamma)} = \frac{(1 - \cos \Gamma)}{(1 + \cos \Gamma)} = \frac{2 \sin^2 \frac{\Gamma}{2}}{2 \cos^2 \frac{\Gamma}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\Gamma}{2}. \end{aligned}$$

Задатак 4.

Ако се број страница правилног многоугла смањи за један, број његових дијагонала смањи се за осам. Који је то многоугао?

Решење:

Према услову задатка важи:

$$\begin{aligned} D_n - 8 &= D_{n-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{n \cdot (n-3)}{2} - 8 &= \frac{(n-1) \cdot (n-1-3)}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{n^2 - 3n - 16}{2} &= \frac{n^2 - 5n + 4}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2n &= 20 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n &= 10. \end{aligned}$$

Задатак 5.

Написати једначину праве која на координатним осама одсеца једнаке одсечке и додирује кружницу $x^2 + y^2 = 18$.

Решење:

Једначину праве можемо написати у сегментном облику $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$. Како је $p = q$ то је $x + y = p \Leftrightarrow y = -x + p$. Права $y = kx + n$ додирује кружницу $x^2 + y^2 = r^2$ ако је $r^2 \cdot (1 + k^2) = n^2$. Како је $r^2 = 18$, $k = -1$ и $n = p$, то је $36 = p^2 \Leftrightarrow p = \pm 6$, па су једначине праве:
 $t_1 : y = -x + 6$ и $t_2 : y = -x - 6$.

2007.

Задатак 1.

Вредност израза

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+3} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right)^{-1} \text{ једнака је:}$$

- а) -1 ; б) $\sqrt{3}$; в) 1 ; г) $\sqrt{3}+3$; д) $\sqrt{3}+2$.

Решење:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+3} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right)^{-1} = \\ & = \left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{3})} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{3})} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right)^{-1} = \\ & = \left(\frac{3+2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{3})} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{3})} \right)^{-1} = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{3})}{\sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot (1+\sqrt{3})}{2 \cdot (1+\sqrt{3})} = 1 \end{aligned}$$

Одговор: в)

Задатак 2.

Упрошћен израз

$$\frac{ax+a}{x^2-x+1} : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^3+1} \right) \text{ има облик:}$$

- а) $\frac{a+x}{1+x}$; б) $\frac{a}{x^3+1}$; в) a ; г) x ; д) 0 .

Решење:

$$\begin{aligned} \frac{ax+a}{x^2-x+1} : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3x}{x^3+1} \right) &= \frac{a(x+1)}{x^2-x+1} : \frac{x^2-x+1+3x}{(x+1) \cdot (x^2-x+1)} = \\ &= \frac{a \cdot (x+1)}{x^2-x+1} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x^2-x+1)}{x^2+2x+1} = \\ &= \frac{a \cdot (x+1)^2 \cdot (x^2-x+1)}{(x^2-x+1) \cdot (x+1)^2} = a \quad x \neq -1 \end{aligned}$$

Одговор: в)

Задатак 3.

Решења квадратне једначине $mx^2 - (m+2)x + 2 = 0$ задовољавају неједнакост $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \geq 3$ за

- а) $m \in (-\infty, 0)$; б) $m \in [3, \infty)$; в) $m \in [4, +\infty)$;
 г) $m \in [-4, 4)$; д) $m \in (0, 4)$.

Решење:

На основу Виетових правила је $x_1 + x_2 = \frac{m+2}{m}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{m}$, $x_1, x_2 \neq 0$, $m \neq 0$, па дата неједнакост добија облик:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \geq 3 &\Leftrightarrow \frac{\frac{m+2}{m}}{\frac{2}{m}} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{m+2}{2} \geq 3 \Leftrightarrow m+2 \geq 6 \Leftrightarrow m \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m \in [4, +\infty) \end{aligned}$$

Одговор: в)

Задатак 4.

Збир решења једначине $\sqrt[3]{64} - 5 \cdot \sqrt[3]{2^{x+3}} + 16 = 0$ је:

- а) 10; б) 3; в) 4; г) 5; д) 16.

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини

$$2^x - 5 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 5 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 16 = 0$$

Увођењем смене $2^{\frac{x}{2}} = t$, једначина се трансформише у $t^2 - 10t + 16 = 0$, чија су решења $t_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$, $t_1 = 8$, $t_2 = 2$. Заменом добијамо $2^{\frac{x}{2}} = 8$ или $2^{\frac{x}{2}} = 2$, односно $2^{\frac{x}{2}} = 2^3$ или $2^{\frac{x}{2}} = 2^1$ па је $\frac{x}{2} = 3$ или $\frac{x}{2} = 1$. Дакле $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Отуда је $x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$.

Одговор: в)

Задатак 5.

Производ решења једначине

$$\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2} \quad \text{је:}$$

- а) 9; б) $\frac{1}{3}$; в) 3; г) 27; д) -2.

Решење:

Нека је $x > 0$. Дата једначина еквивалентна је једначини $\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{2}{\log_3 x} + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2}$.

Усвајањем смене $\log_3 x = t$, једначина добија облик $\frac{1}{t} + t = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$ чија су решења $t_1 = 2$ и $t_2 = -1$, па је $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ или $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, односно $x_1 \cdot x_2 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$.

Одговор: в)

Задатак 6.

Израз

$$\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{2 - \sin 2x} \quad \text{идентички је једнак:}$$

- а) $\cos(x - \frac{f}{4})$; б) $\frac{\cos x + \sin x}{2}$; в) $\sin(x - \frac{f}{4})$; г) 1; д) 0.

Решење:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{2 - \sin 2x} &= \frac{(\cos x + \sin x) \cdot (\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x)}{2 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x) \cdot (1 - \sin x \cdot \cos x)}{2(1 - \sin x \cdot \cos x)} = \\ &= \frac{\cos x + \sin x}{2}. \end{aligned}$$

Одговор: б)

Задатак 7.

У правоуглом троуглу једна катета је 8 cm а друга је 2 cm краћа од хипотенузе. Површина тог троугла је:

- а) 40 cm²; б) 60 cm²; в) 80 cm²; г) 48 cm²; д) 126 cm².

Решење:

Ако су a и b катетете, а c хипотенуза правоуглог троугла, онда је $a = 8$ cm, $b = c - 2$. Применом Питагорине теореме добијамо:

$$\begin{aligned} c^2 &= (c - 2)^2 + 8^2 \Leftrightarrow c^2 = c^2 - 4 \cdot c + 4 + 64 \Leftrightarrow 4 \cdot c = 68 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c = 17 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Отуда, $b = 17 - 2 = 15$ cm, па је

$$P = \frac{a \cdot b}{2} \Leftrightarrow P = \frac{8 \cdot 15}{2} \Leftrightarrow P = 60 \text{ cm}^2.$$

Одговор: б)

Задатак 8.

У купу, чији је осни пресек једнакостранични троугао, уписана је лопта запремине $\frac{32}{3}f$. Запремина купе је:

- а) 20f ; б) 30f ; в) 25f ; г) 24f ; д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Нека је s изводница купе, r полупречник основе, H висина купе, а R полупречник лопте. Како је осни пресек једнакостраничан троугао, то је $2 \cdot r = s$ и $H = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{2}$, а $R = \frac{1}{3}H$ тј.

$R = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{6}$. Запремина лопте је $V = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot f$, па је $\frac{32}{3}f = \frac{4}{3}R^3f$, одакле је $R = 2$. Тада је

$2 = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{6}$ тј. $s = 4\sqrt{3}$, а $r = \frac{s}{2} = 2\sqrt{3}$, $r = 2 \cdot \sqrt{3}$, $H = 6$. Запремина купе је

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot f \cdot H \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot f \cdot 6 \Leftrightarrow V = 24f.$$

Одговор: г)

Задатак 9.

Услов да права $kx - y + 11 = 0$ додирује елипсу $3x^2 + 2y^2 = 11$ је да параметар k има вредности:

а) $k \pm 1$; б) $k \pm 11$; в) $k = 0$; г) $k \pm \sqrt{\frac{63}{2}}$ д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Права $y = kx + n$ додирује елипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако је $a^2k^2 + b^2 = n^2$. Како се дата права може записати у облику $y = kx + 11$ и елипса $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} + \frac{y^2}{\frac{11}{2}} = 1$ то је:

$$\begin{aligned} \frac{11}{3} \cdot k^2 + \frac{11}{2} &= 11^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot k^2 + \frac{1}{2} = 11 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot k^2 = \frac{21}{2} \Leftrightarrow k^2 = \frac{63}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{\frac{63}{2}}. \end{aligned}$$

Одговор: г)

Задатак 10.

Тринаести члан аритметичког низа $-2, -6, -10, \dots$ је:

а) 50; б) -50; в) -26; г) 100; д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Како је $a_1 = -2$ и $d = -6 - (-2) = -4$, то је

$$a_{13} = a_1 + 12 \cdot d \Leftrightarrow a_{13} = -2 + 12 \cdot (-4) \Leftrightarrow a_{13} = -50.$$

Одговор: б)

Задатак 1.

Вредност израза

$$\left(\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ab^{-1} + ba^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} \text{ је:}$$

- а) $2b$; б) $2a$; в) $2a + 2b$; г) $2a - 2b$.

Решење:

За $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b^{-1} + a^{-1}}{ab^{-1} + ba^{-1}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{2}\right)^{-1} - \frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} = \\ & = \left(\frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}\right)^{-1} + \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} - \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{ab}} = \\ & = \left(\frac{\frac{a^2 + b^2}{ab}}{\frac{a+b}{ab}}\right) + \left(\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}\right) - \frac{a-b}{\frac{1}{ab}} = \\ & = \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{2ab}{a+b} - (a-b) = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - a^2 + b^2}{a+b} = \\ & = \frac{2ab + 2b^2}{a+b} = \frac{2b(a+b)}{a+b} = 2b \end{aligned}$$

Одговор: а)

Задатак 2.

Производ решења једначине $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$ је:

- а) $\sqrt{2}$; б) 1; в) 0; г) 2.

Решење:

Дата једначина може се представити у облику:

$$\left(3^{x^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} - 36 \cdot 3^{x^2} \cdot \frac{1}{3^3} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(3^{x^2}\right)^2 - 12 \cdot 3^{x^2} + 27 = 0.$$

Увођењем смене $3^{x^2} = t$, добија се: $t^2 - 12 \cdot t + 27 = 0$ чија су решења $t_1 = 3$ и $t_2 = 9$, одакле је $3^{x^2} = 3^2$ и $x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$ или $3^{x^2} = 3^1$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$ па је производ решења $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) \cdot 1 \cdot (-1) = 2$.

Одговор: г)

Задатак 3.

Решења једначине $\sin x + \cos 2x = 1$ су:

а) $x = k f$; б) $x_1 = \frac{f}{6} + 2kf$, $x_2 = \frac{5f}{6} + 2kf$;

в) $x = \frac{kf}{2}$; г) $x_1 = kf$, $x_2 = \frac{f}{6} + 2kf$, $x_3 = \frac{5f}{6} + 2kf$.

Решење:

Како је $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, то се заменом добија квадратна једначина:

$$2 \cdot \sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \cdot \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = kf, \quad x_2 = \frac{f}{6} + 2 \cdot k \cdot f, \quad x_3 = \frac{5f}{6} + 2 \cdot k \cdot f$$

Одговор: г)

Задатак 4.

Површина ромба чије се дијагонале разликују за $8 m$ не мења се ако се краћа дијагонала продужи за $3 m$, а дужа скрати за $4 m$. Та површина је:

а) $120 m^2$; б) $60 m^2$; в) $240 m^2$; г) $100 m^2$.

Решење:

Означимо дужине дијагонала са d_1 и d_2 . Према условима задатка добијамо следећи систем:

$$d_1 - d_2 = 8$$

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{(d_1 - 4) \cdot (d_2 + 3)}{2}$$

$$d_1 = d_2 + 8$$

$$(d_2 + 8) \cdot d_2 = (d_2 + 4) \cdot (d_2 + 3)$$

$$d_1 = d_2 + 8$$

$$d_2 = 12 \Rightarrow d_1 = 20$$

Тражена површина је $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{20 \cdot 12}{2} = 120 \text{ m}^2$.

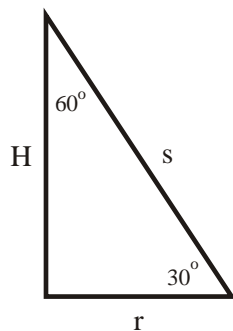
Одговор: а)

Задатак 5.

Угао између изводнице и висине праве кружне купе је 60° , а разлика њихових дужина је 10 m . Запремина купе је:

- а) $1000f \text{ m}^3$; б) $100f \text{ m}^3$; в) 314 m^3 ; г) $300f \text{ m}^3$.

Решење:



$$\frac{H}{s} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow s = 2 \cdot H,$$

$$s - H = 10, 2 \cdot H - H = 10 \text{ m}, H = 10 \Rightarrow s = 20 \text{ m}$$

$$\frac{r}{s} = \sin 60^\circ, r = s \cdot \sin 60^\circ, r = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot f \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (10\sqrt{3})^2 \cdot f \cdot 10$$

$$V = 1000f \text{ m}^3$$

Одговор: а)

2009.

Задатак 1.

Вредност израза

$$\frac{a}{b} \cdot \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)} \cdot \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) \text{ је:}$$

- а) 1; б) 2; в) 0; г) -1.

Решење:

За $a \neq 0, b \neq 0, a \neq -b$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) &= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a+b-a}{a+b}\right) + \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{a+b-b}{a+b}\right) = \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a+b} = \\ &= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \\ &= \frac{a+b}{a+b} = 1 \end{aligned}$$

Одговор: а)

Задатак 2.

Решења једначине $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$ су:

а) 3 или 0; б) $\frac{1}{3}$ или 9; в) 1 или 2; г) 3 или 6.

Решење:

Једначина има смисла за $x > 0$ и $x \neq 1$.

Како је $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, $\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_3 x$ и $\log_{\sqrt{x}} 3 = \frac{2}{\log_3 x}$, то је дата једначина еквивалентна са $\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{2}{\log_3 x} + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2}$.

Увођењем смене $\log_3 x = t$, добија се:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t} + t = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 \cdot t^2 = 4 + t^2 + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right.$$

Одакле је $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ или $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Одговор: б)

Задатак 3.

Ако је $\sin \gamma = \frac{8}{17}$ и γ оштар угао, онда је вредност израза $\cos 2\gamma + (\sin(\gamma - \gamma))^2$ једнака:

- а) $\frac{5}{17}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{225}{289}$; г) $\frac{7}{17}$.

Решење:

Како је $\cos 2\gamma = \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma$ и $\sin(\gamma - \gamma) = \sin \gamma$ то је

$$\begin{aligned} \cos 2\gamma + (\sin(\gamma - \gamma))^2 &= \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma = \cos^2 \gamma = 1 - \sin^2 \gamma = \\ &= 1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}. \end{aligned}$$

Одговор: в)

Задатак 4.

У једнакокраком троуглу збир трећине угла при врху и половине једног од углова на основици износи 48° . Углови тог троугла су:

- а) $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$; б) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$; в) $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$; г) $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.

Решење:

Нека су γ и δ углови на основици, а α угао при врху. Тада је:

$$\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{3}\alpha = 48^\circ$$

$$2\gamma + \alpha = 180^\circ$$

$$\begin{array}{r} -\frac{3}{2}\gamma - \alpha = -144^\circ \\ \hline \end{array}$$

$$2\gamma + \alpha = 180^\circ$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\gamma = 36^\circ \Rightarrow \gamma = 72^\circ \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$

Дакле $\gamma = \delta = 72^\circ$, $\alpha = 36^\circ$

Одговор: г)

Задатак 5.

Три броја образују растући аритметички низ. Њихов збир је 15, а збир њихових квадрата је 147. То су бројеви :

- а) -1, 5, 11; б) 0, 6, 9; в) 1, 6, 8; г) 3, 5, 7.

Решење:

Нека су то бројеви $a - d$, a , $a + d$. Тада је:

$$a - d + a + a + d = 15$$

$$(a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = 147$$

$$3 \cdot a = 15 \Rightarrow a = 5$$

$$(5 - d)^2 + 5^2 + (5 + d)^2 = 147$$

$$a = 5$$

$$25 - 10 \cdot d + d^2 + 25 + 25 + 10 \cdot d + d^2 = 147 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 36 \Leftrightarrow d = \pm 6.$$

Како је низ растући, то је $d > 0$. Дакле, $d = 6$ и тражени бројеви су $-1, 5, 11$.

Одговор: а)

2010.

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\frac{3a^{-x}}{1-a^{-x}} - \frac{2a^{-x}}{1+a^{-x}} - \frac{a^x}{a^{2x}-1} \right) : \frac{a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$ је:

а) 1; б) 5; в) a^x ; г) $a^x - 1$.

Решење:

Како је $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ и $a^{2x} - 1 = (a^x - 1)(a^x + 1)$, дати израз добија облик:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{a^x} - \frac{2}{a^x} - \frac{a^x}{a^{2x}-1} \right) : \frac{1}{a^x - \frac{1}{a^x}} = \\ & \left(\frac{3}{1-\frac{1}{a^x}} - \frac{2}{1+\frac{1}{a^x}} - \frac{a^x}{a^{2x}-1} \right) : \frac{1}{a^x - \frac{1}{a^x}} = \\ & = \left(\frac{3}{a^x - 1} - \frac{2}{a^x + 1} - \frac{a^x}{a^{2x}-1} \right) : \frac{1}{a^{2x}-1} = \\ & = \frac{3a^x + 3 - 2a^x + 2 - a^x}{a^{2x}-1} \cdot (a^{2x}-1) = 5. \end{aligned}$$

Одговор: б)

Задатак 2.

Решење једначине $\sqrt{x-2} = \sqrt{4x-3} - \sqrt{x+1}$ је:

- а) 3; б) 2; в) 1; г) 0.

Решење:

Уз услове да је $x-2 \geq 0$, $4x-3 \geq 0$, $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, добија се:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x-2})^2 &= (\sqrt{4x-3} - \sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x-2 &= 4x-3 - 2\sqrt{4x^2+x-3} + x+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x-3} &= 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2+x-3 &= 4x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x-3 &= 0 \Leftrightarrow x=3. \end{aligned}$$

Одговор: а)

Задатак 3.

Вредност израза $\left(1 - \cos \frac{f}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{f}{8}\right)$ је:

- а) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 1.

Решење:

Користећи формулу за разлику квадрата и одговарајуће адиционе формуле, добија се:

$$\begin{aligned} \left(1 - \cos \frac{f}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{f}{8}\right) &= 1 - \cos^2 \frac{f}{8} = \sin^2 \frac{f}{8} = \\ &= \frac{1 - \cos \frac{f}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Одговор: б)

Задатак 4.

Бројеви: $\log 2$, $\log(5^x - 1)$, $\log(5^x + 3)$ представљају три узастопна члана аритметичког низа за:

- а) 1; б) $\log_2 5$; в) $\log_5 2$; г) 2.

Решење:

Како је код аритметичког низа разлика два суседна члана константна, то је :

$$\begin{aligned} \log(5^x - 1) - \log 2 &= \log(5^x + 3) - \log(5^x - 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log \frac{5^x - 1}{2} &= \log \frac{5^x + 3}{5^x - 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{5^x - 1}{2} &= \frac{5^x + 3}{5^x - 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (5^x - 1)^2 &= 2(5^x + 3) \end{aligned}$$

Увођењем смене $5^x = t$, $t > 0$, добија се квадратна једначина $t^2 - 4t - 5 = 0$, чија су решења: $t_1 = 5$, $t_2 = -1$. Дакле, $5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Одговор: а)

Задатак 5.

Обим већег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је 22 cm. Висина призме је за 1 cm краћа од основне ивице. Површина те призме је:

а) $72\sqrt{3}cm^2$; б) $72f cm^2$; в) $24(2\sqrt{3} + 3)cm^2$; г) $64 cm^2$.

Решење:

Обележимо основну ивицу призме са a и висину са H . Већи дијагонални пресек призме је правоугаоник страница $2a$ и $a - 1$, одакле је обим једнак:

$$\begin{aligned} O &= 2(2a + a - 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 22 &= 2(3a - 1) \Leftrightarrow a = 4cm \\ H &= a - 1 = 3cm. \end{aligned}$$

Како је површина шестостране призме једнака $P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$, то се заменом добијених вредности долази до решења:

$$P = 48\sqrt{3} + 72 = 24(2\sqrt{3} + 3)cm^2.$$

Одговор: в)

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) : (\sqrt{6}+11)^{-1}$ је:

- а) 2; б) -115; ц) 100; д) -100.

Решење:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) : (\sqrt{6}+11)^{-1} = \\ & \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} \cdot \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}-1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} \cdot \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \cdot \frac{3+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\right) : \frac{1}{\sqrt{6}+11} = \\ & \left(\frac{15(\sqrt{6}-1)}{6-1} + \frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4} - \frac{12(\sqrt{6}+3)}{9-6}\right) \cdot (\sqrt{6}+11) = \\ & (\sqrt{6}-11) \cdot (\sqrt{6}+11) = 6-121 = -115 \end{aligned}$$

Одговор: б)

Задатак 2.

Производ решења једначине $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$ је:

- а) 32; б) 6; ц) 1; д) -6.

Решење:

Примењујући правила о промени основе логаритма и о логаритму количника, добија се једначина облика:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x - \log_2 16} = \frac{1}{\log_2 x - \log_2 64} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x - 4} = \frac{1}{\log_2 x - 6}$$

Увођењем смене $\log_2 x = t$ добија се:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t-4)} &= \frac{1}{t-6} \Leftrightarrow t^2 - 4t = t - 6 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x_1 = 2^3 = 8 \\ t_2 = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2^2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Како су решења дате једначине $x_1 = 8$ и $x_2 = 4$ то је њихов производ $x_1 \cdot x_2 = 32$.

Одговор: а)

Задатак 3.

Упрошћен израз $\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{2 + \sin 2x}$ је:

- а) 2 ; б) $\frac{\cos x + \sin x}{2}$; ц) $\frac{\cos x - \sin x}{2}$; д) 1 .

Решење:

Користећи формулу за разлику кубова, основни тригонометријски идентитет $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и формулу $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ добија се:

$$\begin{aligned} \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{2 + \sin 2x} &= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x)}{2 + 2 \sin x \cos x} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x)}{2(1 + \sin x \cos x)} = \frac{\cos x - \sin x}{2} \end{aligned}$$

Одговор: ц)

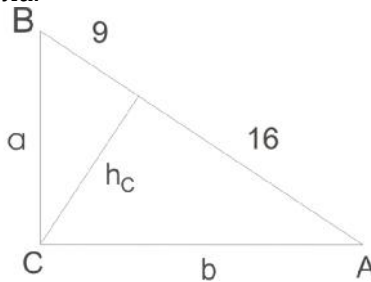
Задатак 4.

Висина хипотенузе дели хипотенузу на одсечке дужина 9 cm и 16 cm. Обим уписане кружнице датог правоуглог троугла је:

- а) 10f cm ; б) 100f cm ; ц) 5f cm ; д) 25f cm .

Решење:

Како су одсечци хипотенузе дати то је хипотенуза $c = 9 \text{ cm} + 16 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$. Висина је поделила дати троугао на два правоугла троугла, у којима се применом Питагорине теореме могу изразити катете датог троугла.



$a^2 = 9^2 + h_c^2$ и $b^2 = 16^2 + h_c^2$. Како је $c^2 = a^2 + b^2$ и $c = 25 \text{ cm}$ то се сабирањем ових једнакости добија $25^2 = 9^2 + 16^2 + 2h_c^2$, одакле је $h_c = 12 \text{ cm}$, па је $a = 20 \text{ cm}$ и $b = 15 \text{ cm}$. Како је полупречник уписане кружнице правоуглог троугла $r = \frac{a+b-c}{2}$ то је $r = 5 \text{ cm}$, па је обим уписане кружнице $O = 2rf = 10f \text{ cm}$.

Одговор: а)

Задатак 5.

Основна ивица правилне четворостране пирамиде је $a = 6 \text{ cm}$, а површина омотача $M = 60 \text{ cm}^2$. Запремина те пирамиде је :

- а) 48 cm^3 ; б) 60 cm^3 ; ц) 36 cm^3 ; д) 120 cm^3 .

Решење:

Како је омотач правилне четворостране пирамиде $M = 2ah_a = 60 \text{ cm}^2$ и $a = 6 \text{ cm}$, то је апотема $h_a = 5 \text{ cm}$. Из правоуглог троугла који повезује апотему, висину пирамиде и полупречник уписане кружнице основе пирамиде, је $H^2 = h_a^2 - r^2$, а како је у основи квадрат, то је полупречник уписане кружнице једнак половини странице, $r = \frac{6}{2} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$ то је $H = 4 \text{ cm}$.

Тражена запремина пирамиде је:

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^3.$$

Одговор: а)

2012.

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\frac{1}{2x+2y} - \frac{3x-y}{x^2-y^2} + \frac{5}{3x-3y} - \frac{25y-17x}{6x^2-6y^2} \right) \div \frac{2}{x+y}$ је:

- 1) 2 2) 1 3) xy 4) $x+y$

Решење:

Расстављајући имениоце на чиниоце, израз постаје :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2(x+y)} - \frac{3x-y}{(x-y)(x+y)} + \frac{5}{3(x-y)} - \frac{25y-17x}{6(x-y)(x+y)} \right) \div \frac{2}{x+y} = \\ & \left(\frac{3(x-y)}{6(x-y)(x+y)} - \frac{6(3x-y)}{6(x-y)(x+y)} + \frac{5 \cdot 2 \cdot (x+y)}{6(x-y)(x+y)} - \frac{25y-17x}{6(x-y)(x+y)} \right) \div \frac{2}{x+y} = \\ & \left(\frac{3x-3y-18x+6y+10x+10y-25y+17x}{6(x-y)(x+y)} \right) \div \frac{2}{x+y} = \\ & \left(\frac{12x-12y}{6(x-y)(x+y)} \right) \div \frac{2}{x+y} = \frac{12(x-y)}{6(x-y)(x+y)} \div \frac{2}{x+y} = \frac{2}{x+y} \div \frac{2}{x+y} = 1, \quad x \neq \pm y \end{aligned}$$

Одговор: 2)

Задатак 2.

Збир решења једначине $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^3 + 2 = 0$ и вредности израза $3\log_3 81 + 2\log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4}$ је :

- 1) 3 2) 2 3) 7 4) 6

Решење:

За $x > 0$, дата једначина еквивалентна је једначини $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$, увођењем смене $\log_2 x = t$, добија се квадратна једначина $t^2 - 3t + 2 = 0$, чија су решења $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, одакле су решења полазне једначине $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

На основу особина логаритама $\log_a b^s = s \log_a b$ $\log_{a^s} b = \frac{1}{s} \log_a b$ је

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4, \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3, \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{-2} = -4$$

$$\text{Отуда је : } 3\log_3 81 + 2\log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} + \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 - 4 = 1$$

Одакле је збир решења дате једначине и вредности датог израза $2 + 4 + 1 = 7$.

Одговор: 3)

Задатак 3.

Решења једначине $3 - 4(\sin 3x)^2 = 0$ на интервалу $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ су:

- 1) $\frac{f}{12}, \frac{5f}{12}, \frac{7f}{12}, \frac{11f}{12}$ 2) $\frac{f}{6}, \frac{5f}{6}$ 3) $\frac{f}{9}, \frac{2f}{9}, \frac{4f}{9}, \frac{5f}{9}$ 4) $\frac{f}{3}, \frac{2f}{3}$

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини :

$$(\sin 3x)^2 = \frac{3}{4}, \text{ одакле је } \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Решења ових једначина су :

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2k \vee 3x = \frac{2\pi}{3} + 2l \quad \text{и} \quad 3x = \frac{4\pi}{3} + 2m \vee 3x = \frac{5\pi}{3} + 2s, \text{ одакле је :}$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k}{3} \vee x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2l}{3} \quad \text{и} \quad x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2m}{3} \vee x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2s}{3} \quad k, l, m, s \in \mathbb{Z}$$

Како решења треба одредити на интервалу $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ то је $x = \frac{\pi}{9} \vee x = \frac{2\pi}{9} \vee x = \frac{4\pi}{9} \vee x = \frac{5\pi}{9}$.

Одговор: 3)

Задатак 4.

Збир првих 120 парних природних бројева је :

- 1) 240 2) 14520 3) 18220 4) 1452

Решење:

Како парни природни бројеви чине аритметички низ, где је ралика свака два суседна члана $d = 2$ и први члан $a_1 = 2$ то се из формуле за првих n чланова аритметичког низа

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \text{ добија } S_{120} = \frac{120}{2}(2 \cdot 2 + (120-1) \cdot 2) = 60 \cdot (4 + 238) = 14520.$$

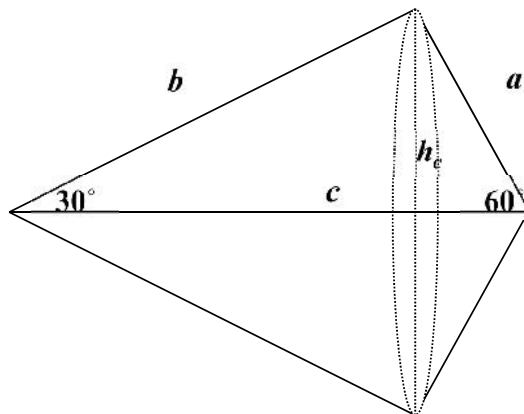
Одговор: 2)

Задатак 5.

Хипотенуза правоуглог троугла је 4, а један оштар угао 30° . Запремина тела које настаје ротацијом троугла око хипотенузе је :

- 1) $4f$ 2) $72f$ 3) $24\sqrt{3}$ 4) $64\sqrt{3}f$

Решење:



Ротацијом троугла око хипотенузе настаје тело које се састоји од две купе спојене базама. Отуда је запремина тако добијеног тела:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}r^2 H_1 + \frac{1}{3}r^2 H_2 = \frac{1}{3}r^2 (H_1 + H_2)$$

Како је збир висина ове две купе једнак хипотенузи датог троугла то је $= \frac{1}{3}r^2 c$.

Полупречник основа купа је висина датог троугла која одговара хипотенузи и може се израчунати из обрасца за површину правоуглог троугла: $P = \frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2}$. Како се у правоуглом

троуглу наспрам угла од 30° налази катета једнака половини хипотенузе то је $a = 2$, а на основу Питагорине теореме $b = 2\sqrt{3}$, па је $r = h_c = \sqrt{3}$. Коначно запремина тела биће једнака :

$$V = \frac{1}{3} r^2 \cdot c = \frac{1}{3} \sqrt{3}^2 \cdot 4 = 4.$$

Одговор: 1)

2013.

Задатак 1.

Вредност израза

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2x-5}{x-4} \right) \cdot \left(\frac{5}{x-4} \right)^{-1}$$

је:

- A) 2; Б) $\sqrt{x}-2$; В) \sqrt{x} ; Г) 1.

Решење:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2x-5}{x-4} \right) \cdot \left(\frac{5}{x-4} \right)^{-1} = \\ & \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5}{x-4} \right) \cdot \left(\frac{x-4}{5} \right) = \\ & \left(\frac{x+2\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}-2x+5}{x-4} \right) \cdot \left(\frac{x-4}{5} \right) = \left(\frac{5}{x-4} \right) \cdot \left(\frac{x-4}{5} \right) = 1 \\ & (x \geq 0, x \neq 4) \end{aligned}$$

Одговор: Г)

Задатак 2.

Производ решења једначине $\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$ је:

- A) -9; Б) 1; В) -6; Г) 0.

Решење:

$\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8 \Leftrightarrow (4-\sqrt{15})^{\frac{x}{3}} + (4+\sqrt{15})^{\frac{x}{3}} = 8$. Како је $(4-\sqrt{15}) \cdot (4+\sqrt{15}) = 1$, тј. $(4-\sqrt{15}) = (4+\sqrt{15})^{-1}$, увођењем смене $(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{3}} = t$ једначина постаје $\frac{1}{t} + t = 8 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 1 = 0$. Решења ове једначине су $t_1 = (4-\sqrt{15}) = (4+\sqrt{15})^{-1}$, $t_2 = (4+\sqrt{15})$, те је $\frac{x}{3} = -1 \vee \frac{x}{3} = 1$. Отуда, решења полазне једначине су $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, те је њихов производ $x_1 \cdot x_2 = -9$.

Одговор: А)

Задатак 3.

Број решења једначине $c \cdot 4x - 3s \cdot 2x = -1$ на интервалу $(0, \pi)$ је :

- А) 4; Б) 0; В) 3; Г) 2.

Решење:

$$c \cdot 4x - 3s \cdot 2x = -1 \Leftrightarrow 1 + c \cdot 4x - 3s \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2c \cdot 2x - 3s \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - s \cdot 2x) - 3s \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow 2s \cdot 2x + 3s \cdot 2x - 2 = 0$$

Решења последње једначине по $s \cdot 2x$ су -2 и $\frac{1}{2}$, а како је $-1 \leq s \cdot 2x \leq 1$, то је $s \cdot 2x = \frac{1}{2}$.

Отуда је $2x = \frac{\pi}{6} + 2k \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$), те је $x = \frac{\pi}{12} + k \vee x = \frac{5\pi}{12} + l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

Како се траже решења на интервалу $(0, \pi)$ то је $x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$. Дакле број решења дате једначине на интервалу $(0, \pi)$ је 2.

Одговор: Г)

Задатак 4.

Површина кружног прстена, део између описаног и уписаног круга правилног шестоугла странице a , је $4\pi c \cdot 2$. Површина тог шестоугла ($у c \cdot 2$) је :

- А) $24\sqrt{3}$; Б) $2\sqrt{3}$; В) 4; Г) 16.

Решење:

Означимо са R, r полупречник описаног и уписаног круга респективно. Тада је $R = a, r = a \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Како је површина кружног прстена $(R^2 - r^2)\pi = 4\pi$, то је $(a^2 - (a \frac{\sqrt{3}}{2})^2)\pi = 4\pi$, одакле је $a = 4c$. Тражена површина шестоугла је $P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$.

Одговор: А)

Задатак 5.

Запремина праве призме чија је основа ромб је $240 c \cdot 3$. Површине дијагоналних пресека су $60 c \cdot 2$ и $80 c \cdot 2$. Површина те призме је :

- А) $24\sqrt{3} c \cdot 2$; Б) $72\sqrt{3} c \cdot 2$; В) $480 c \cdot 2$; Г) $248 c \cdot 2$.

Решење:

Нека су d_1, d_2 дијагонале ромба, $P_1 = d_1 \cdot H, P_2 = d_2 \cdot H$ површине дијагоналних пресека призме висине H . Површина основе $B = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Запремина ове призме је $V =$

$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} H$, одакле је $d_1 \cdot d_2 \cdot H = 2V$, те је $P_1 \cdot P_2 = 2V \cdot H$, а одатле заменом датих вредности добијамо $H = 10c$. Из $P_1 = d_1 \cdot H \Rightarrow d_1 = \frac{P_1}{H} = \frac{6}{1} = 6c$, $d_2 = \frac{P_2}{H} = \frac{8}{1} = 8c$. Како је $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ то је $a = 5c$. Тражена површина призме је $P = 2B + M = d_1 \cdot d_2 + 4a$, одакле је $P = 248c^2$.

Одговор: Г)

2014.

Задатак 1.

Вредност израза

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 - (4-2\sqrt{3})^{-1} - (4+2\sqrt{3})^{-1}$$

је:

А) 2;

Б) 16;

В) $4\sqrt{3}$;

Г) 10.

Решење:

На основу формуле за квадрат збира

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = 4-2\sqrt{3} + 2\sqrt{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})} + 4+2\sqrt{3}$$

и формуле за разлику квадрата

$$\sqrt{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16-12} = \sqrt{4} = 2$$

следи да је

$$\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = 12$$

Како је

$$(4-2\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{4-2\sqrt{3}} \cdot \frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4}$$

и

$$(4+2\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{4+2\sqrt{3}} \cdot \frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$

то је

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 - (4-2\sqrt{3})^{-1} - (4+2\sqrt{3})^{-1} &= 12 - \frac{4+2\sqrt{3}}{4} - \frac{4-2\sqrt{3}}{4} \\ &= 12 - \frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{4} = 12 - \frac{8}{4} = 12 - 2 = 10. \end{aligned}$$

Одговор: Г)

Задатак 2.

Производ решења једначине $8^{|1-3|} = 4^{2-3}$ је:

А) $-\frac{7}{4}$

Б) $-\frac{1}{1}$;

В) $\frac{1}{3}$;

Г) 0.

Решење:

Како је $|1 - 3| = \begin{cases} 1 - 3 & \text{за } x < \frac{1}{3} \\ 3x - 1 & \text{за } x > \frac{1}{3} \end{cases}$ то је за $x < \frac{1}{3}$ дата једначина еквивалентна

једначини:

$2^{3(1-3)} = 2^{2(2-3)}$. Отуда је $3 - 9x = 4 - 6x$, односно $x = -\frac{1}{3}$. За $x > \frac{1}{3}$ дата једначина еквивалентна је једначини:

$2^{3(3-1)} = 2^{2(2-3)}$, одакле је $9x - 3 = 4 - 6x$, те је $x = \frac{7}{1}$. Како су решења дате једначине

$x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{7}{1}$ то је њихов производ $x_1 \cdot x_2 = -\frac{7}{3}$.

Одговор: А)

Задатак 3.

Збир решења једначине $\cos x + \sin \frac{x}{2} = 1$ на интервалу $(0, 4\pi]$ је:

А) 4π ; Б) 2π ; В) 6π ; Г) 8π .

Решење:

Дата једначина еквивалентна је са

$$\sin \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

Како је $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ то је $\sin \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0$, тј. $\sin \frac{x}{2} \cdot (1 - 2 \sin \frac{x}{2}) = 0$. Одатле је

$\sin \frac{x}{2} = 0$ или $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, те је $\frac{x}{2} = k\pi$ или $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2s\pi$ или $\frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $k, s, n \in \mathbb{Z}$.

Зато је $x = 2k\pi$ или $x = \frac{\pi}{3} + 4s\pi$ или $x = \frac{5\pi}{3} + 4n\pi$, $k, s, n \in \mathbb{Z}$. Како се траже решења на интервалу $(0, 4\pi]$, то је $x = 2\pi$ или $x = 4\pi$ или $x = \frac{\pi}{3}$ или $x = \frac{5\pi}{3}$, а одатле је њихов збир једнак 8π .

Одговор: Г)

Задатак 4.

Око круга пречника $15c$ описан је једнакокраки траpez, површине $255c^2$. Збир нумеричких вредности обима и површине овог трапеza је:

А) 323 ; Б) 516 ; В) 355 ; Г) 426 .

Решење:

Нека су a и b основице, c крак, а h висина датог трапеza. Приметимо да је пречник једнак висини.

Како је дати траpez тангентни четвороугао, то је збир основица једнак збиру кракова тј.

$a + b = 2c$. Како је површина трапеza $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, то знајући површину и висину можемо

одредити збир основица, тј. $a + b = \frac{2P}{h} = \frac{2 \cdot 255c^2}{15c} = 34c$. Како је обим једнакокраког трапеza

$O = a + b + 2c$, то је $O = 68c$, отуда је збир нумеричких вредности обима и површине $68 + 255 = 323$.

Одговор: А)

Задатак 5.

Запремина ваљка је $180\pi c^3$. Површина осног пресека је $120c^2$. Површина тог ваљка је :

- А) $138\pi c^2$; Б) $90\pi c^2$; В) $480c^2$; Г) $60c^2$.

Решење:

Означимо са r полупречник основе ваљка и са H висину. Како је површина осног пресека $Q = 2r \cdot H \Rightarrow r \cdot H = \frac{Q}{2} = 60c^2$. Запремина ваљка је $V = r^2 \pi \cdot H$, тј $180\pi c^3 = r^2 \cdot r \cdot H = r \cdot 60c^2$, одакле је $r = 3c$ и $H = \frac{Q}{2r} = \frac{1 \cdot c^2}{2 \cdot 3c} = 20c$. Површина ваљка је $P = 2r \cdot \pi \cdot (r + H) = 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot (3 + 20) = 138\pi c^2$.

Одговор: А)

2015.

Задатак 1.

$|2x - 3| - |x + 2| = 3 - x$ је:

- А) 2; Б) 0; В) -1; Г) 3.

Решење:

$$|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x, & x < \frac{3}{2} \end{cases} \quad |x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 \\ -2 - x, & x < -2 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$(-\infty, -2); [-2, \frac{3}{2}); [\frac{3}{2}, \infty)$.

- 1) $x < -2$, 2) $-2 \leq x < \frac{3}{2}$, 3) $x \geq \frac{3}{2}$.

	$x < -2$	$-2 \leq x < \frac{3}{2}$	$x \geq \frac{3}{2}$
$ 2x - 3 $	$3 - 2x$	$2x - 3$	$2x - 3$
$ x + 2 $	$-2 - x$	$x + 2$	$x + 2$

- 1) $x \in (-\infty, -2)$

$3 - 2x - (-2 - x) = 3 - x \Leftrightarrow 5 - x = 3 - x$, $5 = 3$.

- 2) $x \in [-2, \frac{3}{2})$

$2x - 3 - (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow x - 5 = 3 - x \Leftrightarrow -2 = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

- 3) $x \in [\frac{3}{2}, \infty)$

$2x - 3 - (x + 2) = 3 - x \Leftrightarrow x - 5 = 3 - x \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$.

$x = -1$ $x = 4$ $x = -1 + 4 = 3$.

Одговор: Г)

Задатак 2.

Ако је $10^5 = a$, $10^3 = b$, је $10^8 = 3 \cdot 8$:

A) $\frac{3-3a}{b+1}$; Б) $\frac{2-2a}{b+1}$; В) $\frac{3+3a}{b+1}$; Г) $\frac{2-2b}{a+1}$.

Решење:

$$K_3 B = \frac{1 \cdot 8}{1 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 2^3}{1 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{3 \cdot \frac{1}{5}}{1 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{3 \cdot (1 - 1 \cdot 5)}{1 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{3 \cdot (1 - a)}{b+1} = \frac{3-3}{b+1}$$

Одговор: А)

Задатак 3.

$(1 - s \cdot \frac{\pi}{1}) \cdot (1 + s \cdot \frac{\pi}{1})$ је:

A) 2; Б) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; Г) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Решење:

$$(1 - s \cdot \frac{\pi}{1}) \cdot (1 + s \cdot \frac{\pi}{1}) = 1 - s \cdot 2 \frac{\pi}{1} = c \cdot 2 \frac{\pi}{1} = \frac{1 + c \cdot \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

Одговор: Г)

Задатак 4.

2, 4 18.
35 :
A) 10; Б) 14; В) 20; Г) 16.

Решење:

$$S_4 = 2 \quad S_8 = S_4 + 1 = 2 \quad n$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\frac{4}{2}(2a_1 + (4-1)d) = 2 \quad \frac{8}{2}(2a_1 + (8-1)d) = 20 \quad \cdot 4a_1 + 6d = 2 \quad 8a_1 + 28d = 20.$$

$$a_1 = -1 \quad d = 1. \quad n \quad 35,$$

$$\frac{n}{2}(-2 + (n-1)) = 35, \quad n^2 - 3n - 70 = 0. \quad n =$$

10.

Одговор: А)

Задатак 5.

$B = c, A = b,$ ABC $h_c \quad h_b$
 $h_a (h_a = h_c + h_b),$ a :

A) $\frac{b}{b+c}$; Б) $\frac{b}{b+c}$; В) $\frac{c-b}{b}$; Г) $\frac{c+b}{b}$.

Решење:

$$P = \frac{a h_a}{2} = \frac{b h_b}{2} = \frac{c h_c}{2}, \quad h_a = \frac{2P}{a}, h_b = \frac{2P}{b}, h_c = \frac{2P}{c}$$
$$h_a = h_c + h_b \quad \frac{2P}{a} = \frac{2P}{c} + \frac{2P}{b}, \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{b+c}{c},$$

$$a = \frac{b}{b+c}.$$

Одговор: А)